то, значит, $\varphi \equiv \psi + fs \mod \pi_0^n$, где $f \equiv 0 \mod \deg 0$, поэтому, используя (4), приходим к

$$\varphi^{\Delta}/s \equiv \psi^{\Delta}/s \mod (\pi_0^n, \deg \overset{1}{0}) \qquad (19)$$

Из определения ряда $u(X)$ (см. § 2) сразу же следует, что при $w \geq 1$

$$\frac{u^w}{s} = \frac{u^{w-1}}{s_{n-1}} \equiv \frac{\pi_0^{w-1}}{s_{n-1}} \mod \deg \overset{1}{0} \qquad (20)$$

Кроме того, используя (19), получаем, что при $q \geq 3$, $r \geq 1$

$$\frac{u^{\Delta^r w}}{s} \equiv \frac{\pi_0^w}{s} \mod (\pi_0^{n+w}, \deg \overset{1}{0}) \qquad (21)$$

$$\frac{u^{\Delta^r w}}{s_{n-1}} \equiv \frac{\pi_0^w}{s_{n-1}} \mod (\pi_0^{n+w}, \deg \overset{1}{0}) \qquad (22)$$

А при $q=2$

$$\frac{u^{\Delta^r w}}{s} \equiv \frac{\left(\pi_0 + \pi_0^n h^{\Delta^{r-1}}\right)^w}{s} \mod (\pi_0^{n+w}, \deg \overset{1}{0}) \qquad (23)$$

в частности

$$u^{\Delta^r}/s \equiv \left(\pi_0 + \pi_0^n h^{\Delta^{r-1}}\right)/s \mod (\pi_0^{n+1}, \deg \overset{1}{0})$$

$$u^{2\Delta^r}/s \equiv \left(\pi_0^2 + \pi_0^{2n} h^{\Delta^r}\right)/s \mod (\pi_0^{n+2}, \deg \overset{1}{0})$$

Далее, из этих формул следует (с учетом (15) и (14)), что при $q>2$, $r \geq 1$, $w \geq 1$

$$\frac{d}{dX} \frac{u^{w\Delta^r}}{wq^r} \Big/ s \equiv 0 \mod (\pi_0^{n+w}, \deg \overset{1}{0}) \qquad (24)$$

при $q=2$

$$\frac{d}{dX}\,\frac{u^{w\Delta^r}}{w2^r}\Big/_s \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } e_0>1 \text{ или } w>1 \\ X^{2^r-1}\left(\dfrac{ds}{dX}\right)^{\Delta^r}\Big/_s, & \text{если } e_0=1, w=1 \end{cases} \tag{25}$$

(сравнение происходит по $\bmod\,(\pi_0^n, \deg\overset{\Delta}{o})$). Отсюда заключаем для ряда $\psi\in X\mathcal{O}[[X]]$ при $q=2, w\geq 1, r=1$

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}\frac{d}{dX}(u\psi)^{w\Delta^r}\chi\Big/_{s\cdot w2^r}\equiv 0 \bmod \pi_0 \tag{26}$$

и при $q>2, i\geq 0, 1\leq r\leq 2$

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}\frac{d}{dX}(u\psi)^{q^i\Delta^r}\Big/_{\pi_0^i q_s^r}\equiv 0 \bmod \pi_0^{n+1-r} \tag{27}$$

Во второй части этого параграфа проведем еще одну серию вычислений.

2^0. Пусть $\varphi(X)=X^m\theta\varepsilon(X)$, где $\theta\in R$, а $\varepsilon(X)\in 1+X\mathcal{O}'[[X]]$. Тогда для $w\geq 1$

$$\varphi^{qw}-\varphi^{\Delta w}=\varphi^{\Delta w}\cdot\left(\varphi^{qw(1-\frac{\Delta}{q})}-1\right)=$$

$$=\varphi^{\Delta w}\left(e^{qw\, l_m(\varepsilon)}-1\right)=\varphi^{\Delta w}\left(wq\, l_m(\varepsilon)+\frac{w^2q^2 l_m^2(\varepsilon)}{2!}+\ldots\right) \tag{28}$$

Используя формулу (2) из § I, отсюда выводим, что ряд

$$\frac{1}{wp}\left(\varphi^{qw}-\varphi^{\Delta w}\right)\in\mathcal{O}'[[X]] \tag{29}$$

Пусть $w=q^r s$, где s не делится на q, докажем индукцией по r, что для $\varphi(X)$

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}\frac{d}{dX}\frac{\varphi^w}{w}\Big/_s\equiv 0 \bmod \pi_0^{n-r} \tag{30}$$

Действительно, используя формулы (I4),(I6),(29), получаем

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}\frac{d}{dX}\varphi^{w}/_{ws} \equiv \operatorname{tr}\operatorname{res}\frac{d}{dX}\frac{\varphi^{w/q^{\Delta}}}{w}/_{s} \equiv \operatorname{tr}\operatorname{res}\frac{d}{dX}\frac{\varphi^{w/q}}{w/q}/_{s_{n-1}} \bmod \pi_0^{h}$$

Если, наконец, $\alpha(X)=X\theta\varepsilon(X)$, где опять θ – элемент мультипликативной системы представителей $\mathcal{R}$, $\varepsilon(X)\in 1+X\mathcal{O}'[[X]]$, то для ряда

$$g_r = \frac{\alpha^{q^r w} - \alpha^{q^{r-1} w\Delta}}{q^r w} - l_m(\varepsilon)\,\alpha^{q^{r-1} w\Delta}$$

с помощью формулы (28) получаем, что при $q>p=2$ ряд

$$\frac{q}{p}\Big(\sum_{r\geq 1}\frac{g_r}{\pi_0^{r}} - \frac{w}{\pi_0}\alpha^{w\Delta}\Delta\sigma(\varepsilon)\Big)$$

имеет целые коэффициенты,

при $q=p=2$ ряд

$$\frac{q}{p}\Big(\sum_{r\geq 1}\frac{g_r}{\pi_0^{r}} - \frac{w\alpha^{w\Delta}}{\pi_0}\Delta\sigma(\varepsilon) - \frac{w}{\pi_0}\sum_{r\geq 2}\Big(\frac{2}{\pi_0}\Big)^{r-1}\alpha^{2^{r-1}w\Delta}{}_{\Delta}\,l(\varepsilon)\Big)$$

имеет целые коэффициенты.

Поэтому, используя (I6) и (I7) окончательно находим, что

$$\operatorname{res}\frac{d}{dX}\Big(\sum_{r\geq 1} g_r/\pi_0^{r}\Big)/_{s} \equiv \operatorname{res}\frac{2}{\pi_0}\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{q}\big(w\alpha^{w}\sigma(\varepsilon)\big)/_{s} \bmod \pi_0^{h}, \qquad (31)$$

при $q>p$; если же $q=2$, то

$$\operatorname{res}\frac{d}{dX}\Big(\sum_{r\geq 1} g_r/\pi_0^{r}\Big)^{\gamma}/_{s} \equiv \operatorname{res}\frac{2}{\pi_0}\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{2}\Big(w\alpha^{w}\sigma(\varepsilon)+w\,l(\varepsilon)\sum_{r\geq 2}\alpha^{2^{r-1}w}\Big)^{\gamma}/_{s} \bmod \pi_0^{h} \qquad (32)$$

§ 5. Арифметика $F(\mathfrak{p})$ и примарные элементы .

Элемент β группы точек $F(\mathfrak{p})$ называется π_0^{h}-примарным, если расширение $k(\rho)/_{k}$ неразветвлено, где $[\pi_0^{h}](\rho)=\beta$. π_0^{h}-примарные элементы в группе точек $F(\mathfrak{p})$ при $p\neq 2$

были построены С.В.Востоковым в работе [6]. Ниже будут сформулированы утверждения этой работы, которые без изменения переносятся на случай $p=2$ и доказано предложение 2, в котором учитывается специфика четной характеристики поля вычетов k.

ЛЕММА 4([6]). Пусть $a\in\mathcal{O}$, A – элемент кольца целых пополнения максимального неразветвленного над T расширения $\widetilde{T}_{nr}$, который удовлетворяет равенству $A^{\Delta}-A=a$. Тогда элемент группы точек

$$H(a)=E_F(\pi_0^n A^{\Delta} l_F(z))|_{X=\pi}$$

является π_0^n-примарным, не зависит от выбора разложения элемента ξ в ряд по π и при этом

$$(\pi, H(a))_F=[\mathrm{tr}\, a](\xi),$$
$$H(a)\equiv a\xi^{q^n} \mod \pi^{qe_1+1}$$

и

$$H(a)=E_F(\pi_0^n a\lambda(z))|_{X=\pi}$$

ЛЕММА 5 ([5], § 3). Пусть $\varphi(X)$ – степенной ряд с коэффициентами из $\mathcal{O}$ такой, что $\varphi(\pi)=0$. Тогда найдется ряд $\psi(X)\in\mathcal{O}[[X]]$ такой, что

$$\varphi(X)=u(X)\psi(X)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коэффициенты ряда $u(X)$ при степенях X^i, $i<e$ лежат в максимальном идеале, а коэффициент при X^e является единицей кольца целых поля T, поэтому по подготовительной теореме Вейерштрасса ([3], гл.7) найдется ряд $\varepsilon\in 1+X\mathcal{O}[[X]]$ такой, что $u(X)\varepsilon(X)$ – многочлен Эйзенштейна элемента π над T. Аналогично для ряда $\varphi(X)$ существует ряд $\eta(X)\in 1+X\mathcal{O}[[X]]$ такой, что $\varphi(X)\eta(X)$ – многочлен, имеющий корнем π, следовательно, он делится на мно-

гочлен Эйзенштейна.

ЛЕММА 6 ([6]). Пусть $\mu \geq 1$, тогда

$$v\left(\left(s^{\Delta^{\mu}}(X)\right)\Big|_{X=\pi}\right) \geq e\,(1+\max(\mu, n))$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Элемент

$$\omega(a) = E_F(as(X))\Big|_{X=\pi}$$

совпадает с $H(a)$ с точностью до элемента, делящегося в группе точек $F(\mathfrak{p})$ на изогению $[\pi_0^n]$. Значит, $\omega(a)$ является примарным элементом и не зависит от разложения корня ξ изогении $[\pi_0^n]$ в степенной ряд по простому элементу с точностью до $[\pi_0^n]F(\mathfrak{p})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Общая схема рассуждений такая же как в случае нечетного p . I. Предположим, что ряд $s(X)$ соответствует разложению корня ξ , которое начинается с члена порядка e_n . Пусть $\lambda(X) = \sum_{m\geq 1} c_m X^m$, запишем, пользуясь аддитивностью функции E_F соотношение для рядов

$$E_F(\pi_0^n a \lambda(z)) = E_F(as) +_F \sum_{m\geq 2\ (F)} E_F(as^m c_m)$$

Из определения функции E_F следует

$$E_F(as^m c_m) = \lambda^{-1}(ac_m s^m) +_F \sum_{\mu\geq 1\ (F)} \lambda^{-1}\left(a^{\Delta^{\mu}} c_m s^{\Delta^{\mu} m} / \pi_0^{\mu}\right)$$

Ряд $\lambda^{-1}(X)$ сходится на идеале $\mathfrak{p}^{e_1+1}$ ([5], лемма I), поэтому, так как $v(ac_m s^m) > e_1,\ v\left(a^{\Delta^{\mu}} c_m s^{\Delta^{\mu} m} / \pi_0^{\mu+n}\right) > e_1$ (надо использовать лемму 6 и условие (II)), заключаем

$$E_F(\pi_0^n a \lambda(z))\Big|_{X=\pi} = E_F(as)\Big|_{X=\pi} +_F [\pi_0^n](\gamma),$$

где $\gamma \in F(\mathfrak{p})$.

2. Пусть $\tilde{z}(X)$ соответствует произвольному разложению ξ в степенной ряд по простому элементу π. Используя лемму 5, запишем

$$\tilde{z}(X)=z(X)+u(X)\,z(X)\,\psi(X)$$

для некоторого ряда $\psi\in\mathcal{O}[[X]]$ Ввиду определения $u(X)$ последнее соотношение можно переписать так:

$$\tilde{z}(X)=z(X)+\pi_0\psi'(X)+s_{n-1}^{q-1}\psi''(X),$$

где $\psi',\psi''\in X\mathcal{O}[[X]]$. Индукцией по r устанавливается соотношение

$$\tilde{s}_r=s_r+\pi_0^{r+1}\psi_r^{(1)}+s_{n-1}^{q}\psi_r^{(2)}+\pi_0^{r}s_{n-1}^{q-1}\psi_r^{(3)}$$

Действуя оператором Δ на это соотношение при $r=n-1$ с учетом (4) имеем

$$\tilde{\xi}=s+\pi_0^{n}\tilde{\psi}^{(1)}+s^{q}\psi^{(2)}+\pi_0^{n-1}s^{q-1}\tilde{\psi}^{(3)}$$

где $\tilde{\psi}^{(1)},\tilde{\psi}^{(2)},\tilde{\psi}^{(3)}\in X\mathcal{O}[[X]]$.

Но $E_F(a\pi_0^{n}\tilde{\psi}^{(1)})\big|_{X=\pi}\in[\pi_0^{n}]F(\mathfrak{p})$,

$$E_F(as^{q}\tilde{\psi}^{(2)})\big|_{X=\pi}\in[\pi_0^{n}]F(\mathfrak{p}),\ E_F(a\pi_0^{n-1}s^{q-1}\tilde{\psi}^{(3)})\big|_{X=\pi}\in[\pi_0^{n}]F(\mathfrak{p})$$

(последние два включения проверяются аналогично рассуждениям в первой части доказательства предложения).

Таким образом, $E_F(a\tilde{s}(X))\big|_{X=\pi}\sim_F E_F(as(X))\big|_{X=\pi}\in[\pi_0^{n}]F(\mathfrak{p})$.

Предложение доказано.

Построим теперь ([6], [8]) две системы образующих в группе точек $F(\mathfrak{p})$ над кольцом $\mathcal{O}_0$, которые будут активно использоваться в §§ 6–8.

ЛЕММА 7 ([6]). Пусть для каждого i с условием $i \not\equiv 0 \mod q, 1 \le i < qe_1$ а также для $i = qe_1$ и для каждого $\theta \in R$ выбран элемент $\varepsilon_i(\theta)$ в группе точек $F(\mathfrak{p})$, удовлетворяющий условию: $\varepsilon_i(\theta) \equiv \theta\pi^i \mod \pi^{i+1}$. Тогда любой элемент $\beta \in F(\mathfrak{p})$ можно представить в виде

$$\beta = \sum_{i,r \ge 0} {}_{(F)} [\pi_0^r](\varepsilon_i(\theta_{i,r}))$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый элемент $\beta \in F(\mathfrak{p})$ представим в виде $\beta = \sum_{i \ge 1} {}_{(F)} \varepsilon_i(\theta_i)$, где

$$\varepsilon_i(\theta_i) \equiv \theta_i \pi^i \mod \pi^{i+1}, \quad \theta_i \in R$$

Пользуясь формулами (3) заменяем $\varepsilon_i(\theta_i)$ для $i > qe_1$ на $[\pi_0]\varepsilon_{i-e_1}(\eta\theta_i)$ при подходящем $\eta \in R$, а элементы $\varepsilon_i(\theta_i)$ для $i = qj < qe_1$ на $[\pi_0]\varepsilon_j(\theta_i)$.

ЛЕММА 8 ([6]). Всякий элемент $\beta \in F(\mathfrak{p})$ представляется в виде

$$\beta = \omega(b) +_F \sum_{(F)} E_F(b_i\pi^i),$$

где $b, b_i \in \mathcal{O}$, индекс i пробегает все значения между 1 и qe_1, не делящиеся на q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно воспользоваться леммой 7, (I) и сравнением $E_F(\theta\pi^i) \equiv \theta\pi^i \mod \pi^{i+1}$, а также учесть сравнение для $H(b)$ в лемме 4 и предложение 2.

ЛЕММА 9 ([8]). Всякий элемент $\beta \in F(\mathfrak{p})$ представляется в виде ($\varepsilon_\rho = \lambda^{-1} \circ \lambda_\rho$, см. § 3):

$$\beta = \omega(b) +_F \sum_{r \ge 0, i, \rho} {}_{(F)} [\pi_0^r]\varepsilon_\rho(\theta_{i,r,\rho}\pi^i)$$

где $\theta_{i,r,\rho} \in R$, i пробегает числа от 1 до q^{e_1}, взаимно простые с p, $0 \le \rho < f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверяется, что

$$\lambda_\rho(X) \equiv X + \frac{1}{1-\pi_0^{p^\rho - 1}} X^{p^\rho} \bmod \deg(p^\rho + 1)$$

Поэтому $\mathcal{E}_\rho(X) \sim_F \mathcal{E}_0(X) \equiv \frac{1}{1-\pi_0^{p^\rho-1}} X^{p^\rho} \bmod \deg(p^\rho+1)$

и, значит, функции $\mathcal{E}_i(\theta)$ как в лемме 7 могут быть сконструированы из $\mathcal{E}_0(\theta\pi^i)$, $\mathcal{E}_\rho(\theta\pi^i)$, где i взаимно просто с p, $\theta \in R$.

В §§ 6-8 будет выведена явная формула для обобщенного символа Гильберта в случаях а) $q > p = 2$ - в § 6; б) $q = 2$, $e_0 = 1$ - в § 7; в) $q = 2, e_0 > 1$ - в § 8. Для этого определяется вспомогательное спаривание $\langle \alpha, \beta \rangle_\pi$, зависящее от способа разложения элементов $\alpha \in k^*$, $\beta \in F(\wp)$ в ряд по простому элементу π, доказывается независимость спаривания относительно разложения β в ряд по π и инвариантность спаривания относительно выбора простого элемента π. Из соотношения $(\pi, \beta)_F = \langle \pi, \beta \rangle_\pi$ для элемента β группы точек $F(\wp)$ следует тогда совпадение обобщенного символа Гильберта с этим спариванием и, тем самым, явная формула для символа Гильберта.

§ 6. Явная формула для обобщенного символа Гильберта в случае $q>p=2$.

Пусть $\alpha=\pi^a\theta\varepsilon$ - разложение элемента $\alpha\in k^*$ в произведение степени простого элемента π, элемента мультипликативной системы представителей θ и главной единицы $\varepsilon=1+a_1\pi+a_2\pi^2+\dots$ с коэффициентами $a_i\in\sigma'$. Поставим в соответствие элементу α ряд $\alpha(X)=X^a\theta\varepsilon(X)$, где $\varepsilon(X)=1+a_1X+a_2X^2+\dots\in\sigma'[[X]]$.

Элементу $\beta=b_1\pi+b_2\pi^2+\dots\in F(p)$ с коэффициентами $b_i\in\sigma$ поставим в соответствие ряд $\beta(X)=b_1X+b_2X^2+\dots\in\sigma[[X]]$.

Построим ряды

$$\Phi_{\alpha,\beta}=l_F\left(\beta(X)\right)\alpha^{-1}(X)\frac{d\alpha(X)}{dX}-l_m(\varepsilon(X))\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{\pi_0}\lambda(\beta(X)) \qquad (33)$$

(определения функций l_F, l_m, σ см. в § I) и

$$\Phi^{(1)}_{\alpha,\beta}=v(\alpha)l_F(\beta(X))+\frac{\sigma(\varepsilon(X))\,X\varepsilon(X)}{\frac{d}{dX}(X\varepsilon(X))}\frac{d}{dX}\lambda(\beta(X)) \qquad (34)$$

Определим спаривание на $k^*\times F(p)$ формулой

$$\langle\alpha,\beta\rangle_\pi=\left[\operatorname{tr}\operatorname{res}\left(\Phi_{\alpha,\beta}+\frac{2}{\pi_0}\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{q}\Phi^{(1)}_{\alpha,\beta}\right)\mathcal{X}/s\right](\zeta) \qquad (35)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $q>p$ многочлен $\mathcal{X}$ равен 1.

ЛЕММА IO. Ряды $\Phi_{\alpha,\beta}$, $\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{q}\Phi^{(1)}_{\alpha,\beta}$ в определении спаривания $\langle\alpha,\beta\rangle_\pi$ являются рядами с целыми коэффициентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем второе слагаемое в ряде $\Phi_{\alpha,\beta}$ с помощью (I3) следующим образом:

$$-l_m(\varepsilon(X))\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{\pi_0}\lambda(\beta(X))=-\frac{q}{\pi_0}\,l_m(\varepsilon(X))X^{q-1}\left(\frac{d}{dX}\lambda(\beta(X))\right)^{\Delta}$$

Из условия (II) на коэффициенты логарифма $\lambda(X)$ вытекает, что

$$\frac{d}{dX}\lambda(X) \in \theta_0[[X]] \qquad (36)$$

Поэтому, используя соотношение (2), получаем, что ряд $\Phi_{\alpha,\beta}$ с целыми коэффициентами.

Из (I3) и (37) следует, что ряд $\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{q}\Phi^{(1)}_{\alpha,\beta}$ так же имеет целые коэффициенты.

СЛЕДСТВИЕ. В случае $e_0 > 1$ формула (35) упрощается, так как из-за сравнения (I6)

$$\operatorname{res} \frac{2}{\pi_0}\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{q}\Phi^{(1)}_{\alpha,\beta}/_S \equiv 0 \mod \pi_0^n$$

ЛЕММА II. Спаривание, определенное формулой (35) является линейным по обоим аргументам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Покажем, что для ряда $N(X) \in \theta\{\{X\}\}$, производная которого принадлежит идеалу $\pi_0\theta\{\{X\}\}$, выполняется сравнение

$$\operatorname{res} \frac{d}{dX}\left(N\frac{d}{dX}\lambda(\beta)\right)/_{S_{n-1}} \equiv 0 \mod \pi_0^n \qquad (37)$$

Для этого продифференцируем равенство $l_F(\beta) = \left(1 - \frac{\Delta}{\pi_0}\right)\lambda(\beta)$, получим (с учетом (I3))

$$\frac{d^2}{dX^2} l_F(\beta) = \frac{d^2}{dX^2}\lambda(\beta) - \frac{d}{dX}\left(\frac{q}{\pi_0}X^{q-1}\left(\frac{d\lambda(\beta)}{dX}\right)^{\Delta}\right)$$

Так как $q \geq p^2$ и $\frac{d^2}{dX^2} l_F(\beta) \equiv 0 \mod 2$, заключаем, что

$$\frac{d^2}{dX^2}\lambda(\beta) \equiv 0 \mod \pi_0$$

Запишем теперь ввиду (36)

$$\frac{d}{dX}\left(N\frac{d}{dX}\lambda(\beta)\right) = \frac{dN}{dX}\frac{d}{dX}\lambda(\beta) + N\frac{d^2\lambda(\beta)}{dX^2} \equiv 0 \mod \pi_0$$

Поэтому при $n=1$ (37) выполняется, а при $n>1$ имеем (применяя (4) и (I3))

$$\operatorname{res} \frac{d}{dX}\left(N \frac{d}{dX}\lambda(\beta)\right)/s_{n-1} \equiv \operatorname{res} \frac{d}{dX}\left(N \frac{d}{dX}\lambda(\beta)\right)/s^{\Delta}_{n-2} =$$

$$= \operatorname{res} -N \frac{d}{dX}\lambda(\beta)\, q X^{q-1}\left(\frac{d}{dX}\left(1/s_{n-2}\right)\right)^{\Delta} \equiv 0 \mod \pi_0^{\,n}$$

2. Проверим линейность спаривания $\langle\alpha,\beta\rangle_{\pi}$ по первому аргументу, т.е., что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in k^*$

$$\langle\alpha_1,\beta\rangle_{\pi} +_F \langle\alpha_2,\beta\rangle_{\pi} = \langle\alpha_1\alpha_2,\beta\rangle_{\pi}$$

Пусть $\alpha_i(X) = X^{a_i}\theta_i\varepsilon_i(X)$, положим

$$N = \frac{\sigma(\varepsilon_1)X\varepsilon_1}{(X\varepsilon_1)'} + \frac{\sigma(\varepsilon_2)X\varepsilon_2}{(X\varepsilon_2)'} - \frac{\sigma(\varepsilon_1\varepsilon_2)X\varepsilon_1\varepsilon_2}{(X\varepsilon_1\varepsilon_2)'}$$

Ввиду сравнений

$$\frac{d}{dX}\left(\frac{\sigma(\varepsilon)X\varepsilon}{(X\varepsilon)'}\right) \equiv \frac{\sigma(\varepsilon)'X\varepsilon}{(X\varepsilon)'} + \sigma(\varepsilon) \mod \pi_0$$

$$\sigma(\varepsilon)' \equiv l(\varepsilon)' \equiv \varepsilon'\varepsilon^{-2}(X\varepsilon)' \mod \pi_0 \qquad (38)$$

(они следуют из определения σ, l и (I3)) имеем

$$\frac{dN}{dX} \equiv 0 \mod \pi_0$$

поэтому из первой части доказательства следует утверждение леммы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Значение спаривания $\langle\alpha,\beta\rangle_{\pi}$ не зависит от разложения элемента β в степенной ряд по простому элементу π.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta_1(X), \beta_2(X)$ – два ряда из

Утверждение предложения получается с учетом формулы

$$\frac{d}{dX}\ell_m(\varepsilon)=\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dX}-X^{q-1}\left(\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dX}\right)^{\Delta}, \qquad (39)$$

которая является немедленным следствием определения ℓ_m и соотношения (I3) § 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть π и τ — простые элементы поля связанные равенством $\tau=\alpha(\pi)$ для ряда $\alpha(X)=X\eta\varepsilon(X)$, $\varepsilon(X)\in 1+X\theta'[[X]]$, $\eta\in R$. Take $s_\pi(X)=s_\tau(X,\varepsilon(X))$. Тогда для любого $\beta\in F(\gamma)$

$$\langle\alpha(\pi),\beta\rangle_\pi=\langle\tau,\beta\rangle_\tau$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 7 § 5, взяв в качестве $\varepsilon_i(\theta)=$ $=\mathcal{E}(\theta\pi^i)$ получаем, что любой элемент $\beta\in F(\gamma)$ представим в виде $(\theta_i\in R)$

$$\beta=\sum_{r\geq 0,i}{}_{(F)}\,[\pi_0^r]\,\mathcal{E}(\theta_i\pi^i)$$

Благодаря предложению 3 для доказательства инвариантности спаривания достаточно проверить соотношение

$$\langle\tau,\mathcal{E}(\theta\tau^i)\rangle_\tau=\langle\alpha(\pi),\mathcal{E}(\theta\alpha^i(\pi))\rangle_\pi$$

Будем использовать переменную X в рядах, соответствующих разложению в ряд по τ, Y — в ряд по π.

Положим

$$\langle\tau,\mathcal{E}(\theta\tau^i)\rangle_\tau=[\operatorname{tr}\operatorname{res}\Phi(X)/s_\tau(X)](\zeta)$$

$$\langle\alpha(\pi),\mathcal{E}(\theta\alpha^i(\pi))\rangle_\pi=[\operatorname{tr}\operatorname{res}\Psi(Y)/s_\pi(Y)](\zeta)$$

Из определения спаривания в (35) имеем

$$\Phi(X)=X^{-1}\ell_{F,X}\left(\mathcal{E}(\theta X^i)\right)+\frac{2}{\pi_0}\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{q}\ell_{F,X}\left(\mathcal{E}(\theta X^i)\right)=\theta X^{i-1}+\frac{2i}{\pi_0}\theta X^{qi-1}$$

$X\mathfrak{o}[[X]]$, соответствующие двум разложениям элемента β в ряд по простому элементу π. Тогда $\lambda_a^{-1}\lambda\,(\beta_1(X)\sim_F\beta_2(X))$ обращается в 0 при $X=\pi$, значит, по лемме 5 § 5 имеем

$$\beta_1(X)\sim_F\beta_2(X)=\mathcal{E}(u\psi)$$

для некоторого ряда $\psi\in X\mathfrak{o}[[X]]$, где через $\mathcal{E}$ обозначен ряд $\lambda^{-1}\circ\lambda_a$ с целыми коэффициентами (см. §I). Таким образом, для доказательства предложения нужно проверить

$$\langle\alpha,\mathcal{E}(u\psi)|_{X=\pi}\rangle_\pi=0$$

а для этого достаточно показать, что

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}\Big(\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dX}\,l_{F_a}(u\psi)-l_m(\varepsilon)\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{\pi_0}\lambda_a(u\psi)\Big)/s\equiv 0 \mod \pi_0^{\,n}$$

и

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}\Big(v(\alpha)\frac{2}{\pi_0}\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{q}\,l_{F_a}(u\psi)+\frac{2}{\pi_0}\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{q}\Big(\frac{\sigma(\varepsilon)X\varepsilon}{(X\varepsilon)'}\frac{d}{dX}\lambda_a(u\psi)\Big)\Big)/s\equiv 0 \mod \pi_0^{\,n}$$

Но, пользуясь соотношениями (20),(I2),(2I),(22),(24) § 4, получаем

а) $\operatorname{tr}\operatorname{res}\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dX}l_{F_a}(u\psi)/s\equiv\operatorname{tr}\operatorname{res}\Big(X^{q-1}\big(\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dX}\big)^{\Delta}-\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dX}\Big)\Big(\sum_{r\geq 0}\pi_0^{\,q^r-r-1}\psi^{\Delta q^r}\Big)/s \mod \pi_0^{\,n}$

б) $\operatorname{tr}\operatorname{res}-l_m(\varepsilon)\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{\pi_0}\lambda_a(u\psi)/s\equiv\operatorname{tr}\operatorname{res}-l_m(\varepsilon)\frac{d}{dX}\Big(\sum_{r\geq 0}\pi_0^{\,q^r-r-1}\psi^{\Delta q^r}\Big)/s \mod \pi_0^{\,n}$

А из определения $u(X)$ и (27) § 4

в) $\operatorname{tr}\operatorname{res}\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{q}\Big(\frac{\sigma(\varepsilon)X\varepsilon}{(X\varepsilon)'}\frac{d}{dX}\lambda_a(u\psi)\Big)/s\equiv 0 \mod \pi_0^{\,n}$

г) $\operatorname{tr}\operatorname{res}\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{q}\,l_{F_a}(u\psi)/s\equiv 0 \mod \pi_0^{\,n}$

Рассматривая далее ряд $\Psi(Y)=\Phi_{\alpha,\,\varepsilon(\theta\alpha^i)}+\frac{2}{\pi_0}\frac{d}{dY}\frac{\Delta}{q}\Phi^{(1)}_{\alpha,\,\varepsilon(\theta\alpha^i)}$,

запишем

$$\Phi_{\alpha,\,\varepsilon(\theta\alpha^i)}=\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dY}\,l_{F,Y}\left(\varepsilon(\theta\alpha^i)\right)-l_m(\varepsilon)\frac{d}{dY}\frac{\Delta}{\pi_0}\lambda\left(\varepsilon(\theta\alpha^i)\right)=$$

$$=\theta\alpha^{i-1}\frac{d\alpha}{dY}+\sum_{r\geq 1}\theta^{q^r}\left(\frac{\alpha^{q^r i}-\alpha^{q^{r-1}i\Delta}}{\pi_0^{\,r}}\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dY}-l_m(\varepsilon)\frac{d}{dY}\frac{\alpha^{q^{r-1}i\Delta}}{\pi_0^{\,r}}\right)$$

Из формулы (39) и определения g_r (см. § 4) следует, что

$$\Phi_{\alpha,\,\varepsilon(\theta\alpha^i)}(Y)=\theta\alpha^{i-1}\frac{d\alpha}{dY}+\frac{d}{dY}\left(\sum_{r\geq 1}\frac{\theta g_r}{\pi_0^{\,r}}\right)$$

Пользуясь формулой (31) окончательно получаем

$$\operatorname{res}\Phi_{\alpha,\,\varepsilon(\theta\alpha^i)}/s\equiv\operatorname{res}\left(\theta\alpha^{i-1}\frac{d\alpha}{dY}+\frac{d}{dY}\frac{2}{\pi_0}\frac{\Delta}{q}\left(i\theta\alpha^i\sigma(\varepsilon)\right)\right)/s\mod\pi_0^{\,n}$$

Далее, из (16) § 4 вытекает, что

$$\operatorname{res}\frac{d}{dY}\frac{2}{\pi_0}\frac{\Delta}{q}\Phi^{(1)}_{\alpha,\,\varepsilon(\theta\alpha^i)}/s\equiv\operatorname{res}\frac{2}{\pi_0}\left(i\theta\alpha^{q^{i-1}}\frac{d\alpha}{dY}+\frac{d}{dY}\frac{\Delta}{q}\left(i\theta\alpha^i\sigma(\varepsilon)\right)\right)/s\mod\pi_0^{\,n}$$

~~here $1/s(X)=1/s_Y(\alpha(X))$ mod $(\pi_0^n, \deg\theta)$~~

Итак,

$$\operatorname{res}_Y\Psi(Y)/s_\pi(Y)\equiv\operatorname{res}_Y\left(\frac{2}{\pi_0}i\theta\alpha^{q^{i-1}}\frac{d\alpha}{dY}+\alpha^{i-1}\frac{d\alpha}{dY}\right)/s_\pi(Y)=$$

$s_\pi=s_\tau(\alpha(X))$

$$=\operatorname{res}_X\left(\frac{2}{\pi_0}i\theta X^{q^{i-1}}+X^{i-1}\right)/s(X)\equiv\operatorname{res}_X\Phi(X)/s(X)\mod\pi_0^{\,n}$$

Предложение доказано.

ТЕОРЕМА I. Для обобщенного символа Гильберта в случае $q>p=2$ имеет место формула

$$(\alpha,\beta)_F = \left[\operatorname{tr}\operatorname{res}\left(\Phi_{\alpha,\beta} + \frac{2}{\pi_0}\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{q}\Phi^{(1)}_{\alpha,\beta}\right)/s\right](\zeta)$$

(ряды $\Phi_{\alpha,\beta}$, $\Phi^{(1)}_{\alpha,\beta}$ определены в (33) и (34)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем систему образующих группы точек $F(\gamma)$, построенных в лемме 9 § 5. Из предложения 3 следует, что из представления

$$\beta = \omega(b) +_F \sum_{r\geq 0,i,\rho}{}^{(F)} [\pi_0^r]\,\mathcal{E}_\rho(-\theta_{i,r}\pi^i)$$

вытекает формула

$$\langle\pi,\beta\rangle_\pi = \langle\pi,\omega(b)\rangle_\pi +_F \sum_{r\geq 0,i,\rho}{}^{(F)} [\pi_0^r]\langle\pi,\mathcal{E}_\rho(-\theta_{i,r}\pi^i)\rangle_\pi$$

Докажем следующие два соотношения

doesn't depend mod $[\pi_0^n]$ on the choice of $s_\pi(X)$

$$(\pi,\omega(b))_F = \langle\pi,\omega(b)\rangle_{\pi,\ \text{any } s_\pi(X)} \tag{40}$$

$$(\pi,\mathcal{E}_\rho(-\theta\pi^i))_F = \langle\pi,\mathcal{E}_\rho(-\theta\pi^i)\rangle_{\pi,\ \text{any } s_\pi(X)} \tag{41}$$

Первое следует из предложения 2 и леммы 4 § 5 и формулы

(take $\omega(b)=E_X(a\,s_\pi(X))|_{X=\pi}$)

$$\langle\pi,\omega(b)\rangle_\pi = \left[\operatorname{tr}\operatorname{res}\left(bX^{-1} + \frac{2}{\pi_0}\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{q}(bs)\right)/s\right](\zeta) = [\operatorname{tr} b](\zeta)$$

которая получена с помощью (14) и (15).

Далее, ввиду свойств символа Гильберта справедлива формула (i взаимно просто с p)

$$(\pi,\mathcal{E}_\rho(-\theta\pi^i))_F = (\pi,-\theta\pi^i)_{F_\rho} = \frac{1}{i}(\theta\pi^i,-\theta\pi^i)_{F_\rho} = 0,$$

так как $[\pi_0^n]_\rho$ – унитарный многочлен и $\theta\pi^i$ является мультипликативной нормой в расширении поля k, полученном присоединением корня уравнения $[\pi_0^n]_\rho(X) = -\theta\pi^i$.