Для спаривания $\langle\, ,\rangle_\pi$ же выполняется формула

$$\langle \pi, \mathcal{E}_\rho(-\theta\pi^i)\rangle_\pi = \left[\operatorname{tr}\operatorname{res}\left(X^{-1} l_{F_\rho}(-\theta X^i) + \frac{2}{\pi_0}\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{q} l_{F_\rho}(-\theta X^i)\right)/s\right](\zeta)$$

Используем лемму 3 § 3, формулы (I8), (30), чтобы показать, что

$$\langle \pi, \mathcal{E}_\rho(-\theta\pi^i)\rangle_\pi = \left[\operatorname{tr}\operatorname{res}\left(-\theta X^{i-1} + \frac{2}{\pi_0}\theta X^{iq-1} - \frac{2}{\pi_0} i\,\theta X^{qi-1}\right)/s\right](\zeta) = 0$$

Таким образом, соотношение (4I) тоже доказано.

Значит, для любого $\beta \in F(\rho)$

$$\langle \pi, \beta\rangle_\pi = (\pi, \beta)_F$$

Пусть $\varepsilon$ – главная единица поля $k$, $\tau = \pi\varepsilon$, тогда ввиду свойства инвариантности спаривания $\langle\, ,\rangle$ имеем

$$\langle \varepsilon, \beta\rangle_\pi^{s_\pi(X) = s_\tau(X\varepsilon(X))} = \langle \tau, \beta\rangle_\pi^{s_\pi(X)} \sim_F \langle \pi, \beta\rangle_\pi^{s_\pi(X)} = \langle \tau, \beta\rangle_\tau^{s_\pi(X)} \sim_F \langle \pi, \beta\rangle_\pi^{s_\pi(X)} =$$

$$= (\tau, \beta)_F \sim_F (\pi, \beta)_F = (\varepsilon, \beta)_F$$

Теорема доказана.

## § 7. Явная формула для обобщенного символа Гильберта в случае $q=2,\ e_0=1$

Для элементов $\alpha \in k^*$, $\beta \in F(\rho)$ построим ряд

$$\Phi^{(2)}_{\alpha,\beta} = \frac{d}{dX}\frac{\Delta}{2}\left(\sigma(\varepsilon(X))\,\sigma_F(\beta(X))\right) \tag{42}$$

и определим спаривание на $k^* \times F(\rho)$ формулой

$$\langle \alpha, \beta\rangle_\pi = \left[\operatorname{tr}\operatorname{res}\left(\Phi_{\alpha,\beta} + \Phi^{(2)}_{\alpha,\beta}\right)\chi/s\right](\zeta) \tag{43}$$

(определение $\Phi_{\alpha,\beta}$ в § 6, многочлена $\chi(X)$ в § 2).

ЛЕММА I2. Ряд $\Phi_{\alpha,\beta} + \Phi^{(2)}_{\alpha,\beta}$ имеет целые коэффициенты и спаривание (43) линейно по обоим аргументам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ряд $\Phi_{\alpha,\beta}$ имеет целые коэффициенты согласно лемме 10 § 6, ряд $\Phi^{(2)}_{\alpha,\beta}$ – ввиду формулы (13) § 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Значение $\langle\alpha,\beta\rangle_\pi$ не зависит от способа разложения элемента $\beta\in F(\gamma)$ в ряд по простому элементу $\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же как в доказательстве предложения 3 § 6 устанавливается, что достаточно доказать

$$\langle\alpha, \mathcal{E}(u\psi)|_{X=\pi}\rangle_\pi = \Big[\operatorname{tr}\operatorname{res}\Big(\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dX}\,l_{F_a}(u\psi) -$$

$$-\,l(\varepsilon)\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{\pi_0}\lambda_a(u\psi)+\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{2}\big(\sigma(\varepsilon)\sigma_{F_a}(u\psi)\big)\chi/s\Big](\zeta)\equiv 0 \mod \pi_0^n \quad (44)$$

Следующие формулы получаются применением соотношений (20),(21), (23),(25) § 4:

а) $$\operatorname{res}\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dX}\Big(1-\frac{\Delta}{\pi_0}\Big)\lambda_a(u\psi)\chi/s\equiv\operatorname{res}\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dX}\chi\Big(\Big(\sum_{r\geq0}\pi_0^{2^r-r-1}\psi^{2^r}\Big)/s_{n-1}+$$

$$+\big(\pi_0^{n-1}h\psi^{\Delta}+\pi_0^{2n-2}h^{\Delta}\psi^{2\Delta}\big)/s+\sum_{r\geq0}\pi_0^{2^r-r-1}\psi^{2^r\Delta}/s\Big)\mod\pi_0^n$$

б) $$\operatorname{res}l(\varepsilon)\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{\pi_0}\lambda_a(u\psi)\chi/s\equiv\operatorname{res}l(\varepsilon)\chi/s\Big(\frac{d}{dX}\Big(\sum_{r\geq0}\pi_0^{2^r-r-1}\psi^{2^r\Delta}\Big)+$$

$$+\psi^{\Delta}\frac{d}{dX}\frac{s_{n-1}^{\Delta}}{2}\Big)\mod\pi_0^n$$

в) $$\operatorname{res}\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{2}\sigma(\varepsilon)\cdot\sigma_{F_a}(u\psi)\chi/s\equiv\operatorname{res}\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{2}\sigma(\varepsilon)\chi/s\Big(\Big(\sum_{t\geq0}\Delta^t\Big)(\pi_0-\Delta)\cdot$$

$$\cdot\Big(\sum_{r\geq0}\pi_0^{2^r-r-1}\psi^{2^r\Delta}\Big)+\Big(\sum_{t\geq0}\Delta^t\Big)(\pi_0-\Delta)\big(\pi_0^{n-1}h\psi^{\Delta}+\pi_0^{2n-2}h^{\Delta}\psi^{2\Delta}\big)\Big)\mod\pi_0^n$$

г) $$\operatorname{res}\Delta\sigma(\varepsilon)\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{2}\sigma_{F_a}(u\psi)\chi/s\equiv\operatorname{res}\Delta\sigma(\varepsilon)\chi/s\Big(\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{2}\Big(\sum_{t\geq0}\Delta^t\Big)\cdot$$

$$\cdot(\pi_0-\Delta)\Big(\sum_{r\geq0}\pi_0^{2^r-r-1}\psi^{2^r}\Big)+\psi^{\Delta}\frac{ds_{n-1}^{\Delta}}{2dX}+X\psi^{\Delta^2}\Big(\frac{ds_{n-1}^{\Delta}}{2dX}\Big)^{\Delta}\Big)\mod\pi_0^n$$

Рассмотрим отдельно 2 случая: $h=1$ и $h>1$

Случай $h=1$. Здесь из определения $h$ и $z$ (§ 2) следует

$$h \equiv z \mod (\pi_0, \deg 2e)$$

а из $(5')$

$$\chi_0^\Delta / z \equiv 0 \mod (\pi_0, \deg 0)$$

и, наконец,

$$X^2 \left(\frac{dz}{dX}\right)^\Delta \equiv 0 \mod (\pi_0, \deg 2e)$$

Теперь, используя эти три сравнения, (I2), (38) и сравнение

$$\operatorname{res} \alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dX}\varphi^\Delta \equiv \operatorname{res} X\left(\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dX}\right)^\Delta \varphi^\Delta \mod \pi_0 \qquad (45)$$

которое вытекает из (I3) и справедливо для любого ряда $\varphi(X) \in \mathfrak{o}\{\{X\}\}$, приходим к соотношению

$$\operatorname{tr} \operatorname{res}\left(\Phi_{\alpha,\varepsilon(u\psi)}\big|_{X=\pi} + \Phi^{(2)}_{\alpha,\varepsilon(u\psi)}\big|_{X=\pi}\right)\chi/s \equiv \operatorname{tr} \operatorname{res} X\left(\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dX}\right)^\Delta \psi^\Delta \left(\chi_0^\Delta + z\chi_0 + z\right)/s \mod \pi_0^n$$

Поэтому, пользуясь свойством $(5')$ многочлена $\chi(X)$ получаем, что (44) доказано.

Случай $h>1$. Из определения рядов $s_m(X)$ при $q=2$, $e_0=1$ имеем

$$\frac{d}{dX}\left(1/s_{h-1}\right) + \frac{ds}{dX}\Big/\pi_0 s + \frac{ds}{dX}\Big/\pi_0 s_{h-1} \equiv 0 \mod (\pi_0^n, \deg 0)$$

$$\frac{d}{dX}\frac{s_{h-1}^\Delta}{2} \equiv \frac{d}{dX}\frac{s}{2} + \pi_0^{h-1}\frac{dh}{dX} \mod \pi_0^n$$

Поэтому, используя (I2),(38) и (45), приходим к сравнению

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}\left(\Phi_{\alpha,\varepsilon(u\psi)}|_{X=\pi} + \Phi^{(2)}_{\alpha,\varepsilon(u\psi)}|_{X=\pi}\right)\chi/s \equiv$$
$$\equiv \operatorname{tr}\operatorname{res} X^3\left(\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dX}\right)^{\Delta^2}\psi^{\Delta^2}G(X) \equiv 0 \mod \pi_0^n$$

где $G(X)$ определено соотношением (7) § 2.

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\pi$ и $\tau$ - простые элементы поля $k$, связанные равенством $\tau = \alpha(\pi)$ для $\alpha(X) = X\eta\varepsilon(X)$, где $\varepsilon(X) \in 1 + X\theta[[X]]$, $\eta \in R$. Take $s_\pi(X) = s_\tau(X\eta\varepsilon(X))$. Тогда для любого элемента $\beta$ группы точек $F(\gamma)$

$$\langle \alpha(\pi), \beta \rangle_{\pi, s_\pi} = \langle \tau, \beta \rangle_{\tau, s_\tau}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь леммой 8 § 5 и формулой (I) §I, запишем элемент $\beta \in F(\gamma)$ в виде

$$\beta = E_F(b\, s(X))|_{X=\pi} +_F \sum_{r\geq 0, i} {}_{(F)} [\pi_0^r]\,\varepsilon(\theta_{i,r}\pi^i),$$

где $1 \leq i < 2e_1$ и индекс $i$ взаимно прост с $p$, $\theta_{i,r} \in R$, $b \in \theta_0$. Так же как в доказательстве предложения 4 § 6 делаем вывод о том, что достаточно проверить выполнение следующих соотношений (обозначим $A(X) = E_{F,X}(\bar\eta\, s_\tau(X))$, $i$ взаимно просто с $p$; $\theta, \bar\eta \in R$ ):

use Propos. 2

$$\langle \tau, A(X)|_{X=\tau} \rangle_\tau = \langle \alpha(\pi), A(\alpha(Y))|_{Y=\pi} \rangle_\pi \tag{46}$$

$$\langle \tau, \varepsilon(\theta\tau^i) \rangle_\tau = \langle \alpha(\pi), \varepsilon(\theta\alpha(\pi)^i) \rangle_\pi \tag{47}$$

(как и в доказательстве предложения 4, элементу $\tau$ соответствует переменная $X$, $\pi$ - переменная $Y$ ).

При нечетном $i$ ввиду формулы (I7) § 4, имеем

$$\langle \tau, \varepsilon(\theta\tau^i) \rangle_\tau = [\operatorname{tr}\operatorname{res}\theta X^{i-1}\chi(X)/s_\tau(X)](3) = 0$$

и ввиду формулы (32) § 4 и (I7) и рассуждений в доказательстве предложения 4

$$\langle \alpha(\pi), \mathcal{E}(\theta\alpha(\pi)^i)\rangle_\pi = \left[\operatorname{tr}\operatorname{res}\, \theta\alpha^{i-1}\frac{d\alpha}{dY}\,\chi_\pi(Y)/s_\pi(Y)\right](\xi) = 0$$

because $s_\pi(Y) = s_\tau(Y\eta\varepsilon(Y)) \Rightarrow \chi_\pi(Y) = \chi_\tau(Y\eta\varepsilon(Y))$

Поэтому (47) доказано.

Для доказательства (46) запишем формулу при четном $i$

$$\langle \alpha(\pi), \mathcal{E}(\theta\alpha(\pi)^i)\rangle_\pi = \left[\operatorname{tr}\operatorname{res}\left(\theta\alpha^{i-1}\frac{d\alpha}{dY} + \frac{d}{dY}\frac{\Delta}{2}(\sigma(\varepsilon)\sigma_{F_a}(\alpha^i))\right)\chi_\pi(Y)/s_\pi(Y)\right](\xi) \quad (48)$$

которая также следует из (32) § 4 и доказательства предложения 4 § 6.

Пусть $\bar{\eta}s(X) = \sum d_i X^i$ с коэффициентами $d_i \in \theta$. Разложим элементы $d_i$ в ряд по простому элементу $\pi_0$ с коэффициентами из $\mathcal{R}$: $d_i = \sum d_{i,t}\,\theta_t$, где $d_{i,t} \in \theta_0$, $\theta_t \in \mathcal{R}$. Используя формальную аддитивность функции $E_F$, получим (с учетом (I) § I)

$$A(X) = E_{F,X}(\bar{\eta}s(X)) = \sum_{i,t}{}_{(F)}\, [d_{i,t}]\,\mathcal{E}(\theta_t X^i).$$

Из соотношения (4) следует, что $d_{i,t} \equiv 0 \mod \pi_0^n$ при нечетном индексе $i$, поэтому (I5) и (48) дают

$$\langle \alpha(\pi), A(\alpha(Y))|_{Y=\pi}\rangle_\pi = \Big[\operatorname{tr}\operatorname{res}\Big(\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dY}\,s_\pi(Y) +$$

$$+ \frac{d}{dY}\frac{\Delta}{2}\Big(\sigma(\varepsilon)\sum_{t\geq 0}\Delta^t s\Big)\chi_\pi/s_\pi\Big](\xi) = \xi = \langle \tau, A(X)|_{X=\tau}\rangle_\tau,$$

что и доказывает (46) и заканчивает доказательство предложения.

ТЕОРЕМА 2. Для обобщенного символа Гильберта в случае $q=2, e_0=1$ имеет место формула

$$(\alpha,\beta)_F = [\mathrm{tr}\,\mathrm{res}\,(\Phi_{\alpha,\beta}+\Phi^{(2)}_{\alpha,\beta})\chi/s](\zeta)$$

(ряд $\Phi_{\alpha,\beta}$ определен в (34), $\Phi^{(2)}_{\alpha,\beta}$ — (42)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же как в доказательстве теоремы I показывается, что достаточно проверить выполнение соотношений

$$(\pi, \omega(b))_F = \langle \pi, \omega(b)\rangle_\pi$$

$$(\pi, \mathcal{E}_0(-\theta\pi^i))_F = \langle \pi, \mathcal{E}_0(-\theta\pi^i)\rangle_F, \quad 2\nmid i$$

Первое соотношение следует из предложения 2 и леммы 4 § 5, а также доказательства предложения 6.

Второе соотношение для спаривания $\langle\,,\,\rangle_\pi$ проверяется с использованием леммы 3 § 3, (I8) и (30) § 4. Теорема доказана.

## § 8. Явная формула для обобщенного символа Гильберта в случае $q=2, e_0>1$

Для элементов $\alpha\in k^*$, $\beta\in F(\mathfrak{p})$ построим ряд

$$\Phi^{(3)}_{\alpha,\beta} = \frac{d}{dX}\left(\ell(\varepsilon(X))\,\Delta\sigma(\beta(X))\right) \tag{49}$$

и определим спаривание на $k^*\times F(\mathfrak{p})$ формулой

$$\langle\alpha,\beta\rangle_\pi = [\mathrm{tr}\,\mathrm{res}\,(\Phi_{\alpha,\beta}+\Phi^{(3)}_{\alpha,\beta})\chi/s](\zeta) \tag{50}$$

(определение $\Phi_{\alpha,\beta}$ в § 6, многочлена $\chi(X)$ в § 2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Спаривание $\langle\alpha,\beta\rangle_\pi$ не зависит от разложения элемента $\beta$ группы точек $F(\mathfrak{p})$ в ряд по простому элементу $\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проверки соотношения

$$\langle \alpha, \mathcal{E}(u\psi)|_{X=\pi} \rangle_\pi = 0$$

воспользуемся формулами (16),(20),(23),(26) и (32) § 3. Тогда получим

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}\Big(\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dX}\, l_{F_a}(u\psi) - l_m(\varepsilon)\frac{d}{dX}\frac{\Delta}{\pi_0}\lambda_a(u\psi)\Big)\chi/s \equiv$$

$$\equiv \operatorname{tr}\operatorname{res}\,\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dX}\left(\frac{\pi_0^{n-1}\chi_0\psi + \pi_0^{n-1}\chi_0\psi^2}{s_{n-1}} + \frac{(\pi_0^{n-1}h\psi^{\Delta} + \pi_0^{2n-2}h\psi^{\Delta 2\Delta})\chi}{s}\right) \bmod \pi_0^n$$

и

$$\operatorname{tr}\operatorname{res}\frac{d}{dX}\Big(l(\varepsilon)\,\Delta\sigma(\mathcal{E}(u\psi))\Big)\chi/s \equiv$$

$$\equiv \operatorname{tr}\operatorname{res}\,\pi_0^{n-1}\chi_0\psi^{\Delta^2}\frac{d}{dX}l(\varepsilon)/s \mod \pi_0^n$$

Отсюда, используя (39) и определение $G(\chi)$ в § 2, находим

$$\langle \alpha, \mathcal{E}(u\psi)|_{X=\pi} \rangle_\pi = \Big[\operatorname{tr}\operatorname{res}\, X\Big(\varepsilon^{-1}\frac{d\varepsilon}{dX}\Big)^{\Delta}\psi^{\Delta^2}G(\chi)\Big](\xi) = 0$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $\pi$ и $\tau$ – простые элементы поля $k$, связанные соотношением $\tau = \alpha(\pi)$ для $\alpha(X) = X\eta\varepsilon(X)$, где $\varepsilon(X) \in 1 + X\mathcal{O}[[X]]$, $\eta \in R$. Take $s_\pi = s_\tau(X\eta\varepsilon(X))$, Тогда для любого элемента $\beta$ группы точек $F(\rho)$

$$\langle \alpha(\pi), \beta \rangle_{\pi, s_\pi} = \langle \tau, \beta \rangle_{\tau, s_\tau}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, пользуясь предложением 7 и леммой 9 в § 5, что для нечетного $i$, $\theta \in R$

$$\langle \tau, \mathcal{E}_0(-\theta\tau^i) \rangle_\tau = \langle \alpha(\pi), \mathcal{E}_0(-\theta\alpha(\pi)^i) \rangle_\pi \tag{51}$$

и если $A(X) = E_{F,X}(\bar\eta\, s_\tau(X))$, $\bar\eta \in R$, что

use Proposition2

$$\langle \tau, A(X)|_{X=\tau} \rangle_\tau = \langle \alpha(\pi), A(\alpha(Y))|_{Y=\pi} \rangle_\pi \tag{52}$$

Пользуясь леммой 3, (I6) в § 3 и определением многочлена $\chi(X)$ при $e_0>1$ в § 2 получаем

$$\langle \tau, \mathcal{E}_0(-\theta\tau^i)\rangle_\tau = [\operatorname{tr}\operatorname{res}\theta X^{-1}(X^i+X^{2i}+\pi_0X^{4i})\chi/s](\xi)$$

Теперь из (I2) и (I0) следует, что

$$\langle \tau, \mathcal{E}_0(-\theta\tau^i)\rangle_\tau = [\operatorname{tr}\operatorname{res}\theta X^{2i-1}((\chi/s)^\Delta+\chi/s+\pi_0/s_{n-1})](\xi)=0$$

Далее, применяя те же формулы и используя (32), находим

because $s_\pi = s_\tau(\alpha(X)) \Rightarrow \chi_\pi = \chi_\tau(\alpha(X))$

$$\langle \alpha(\pi), \mathcal{E}_0(-\theta\alpha^i(\pi))\rangle_\pi =$$

$$=[\operatorname{tr}\operatorname{res}\left(\theta\frac{d}{dY}\left(\frac{\alpha^i}{i}+\frac{\alpha^{2i}}{2i}+\frac{\pi_0\alpha^{4i}}{4i}\right)+\theta\frac{d}{dY}(\alpha^{i\Delta}\ell(\varepsilon))\right)\chi_\pi/s_\pi](\xi)$$

Теперь из (28) и (I0) опять следует, что

$$\langle \alpha(\pi), \mathcal{E}_0(-\theta\alpha^i(\pi))\rangle_\pi = 0$$

Таким образом, соотношение (5I) доказано.

Для проверки (52) так же как в доказательстве предложения 6 § 7 воспользуемся формулой

$$\langle \alpha(\pi), \mathcal{E}(\theta\alpha^j(\pi))\rangle_\pi = [\operatorname{tr}\operatorname{res}\theta\alpha^{j-1}\frac{d\alpha}{dY}\chi/s_\pi + \left(\sum_{t\geq 1}\theta\alpha^{j\Delta^t}\right)\frac{d}{dY}\ell(\varepsilon)\cdot\pi_0^{n-1}\chi_0/s_\pi](\xi)$$

которая справедлива для любого $j\geq 1$ и которая получается вычислениями, схожими с только что проделанными.

ТЕОРЕМА 3. Для обобщенного символа Гильберта в случае $q=2$, $e_0>1$ имеет место формула

$$(\alpha,\beta)_F = [\operatorname{tr}\operatorname{res}(\Phi_{\alpha,\beta}+\Phi^{(3)}_{\alpha,\beta})\chi/s](\xi)$$

(ряды $\Phi_{\alpha,\beta}$; $\Phi^{(3)}_{\alpha,\beta}$ определены в (34) и (49), многочлен $\chi(X)$ определен в § 2).

Доказательство проводится по общей схеме с использованием вычислений предложения 8.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $n=1$ формула для символа Гильберта упрощается :

$$(\alpha,\beta)_F = [\,\mathrm{tr}\,\mathrm{res}\,\alpha^{-1}\frac{d\alpha}{dX}\,\sigma_F(\beta)/s\,](3)$$

Инвариантность и независимость соответствующего спаривания проверяются аналогично доказательствам предложений 7 и 8.

## § 9. Некоторые вычисления обобщенного символа Гильберта, связанные с явной формулой

В этом заключительном параграфе главы I будут рассмотрены следующие вопросы:

I) доказательство невырожденности обобщенного символа Гильберта с использованием явной формулы для него;

2) отсутствие "символьности" у обобщенного символа Гильберта при $p=2$ и заменяющие формулы;

3) символ Гильберта в мультипликативном случае: связь с формулами Кнезера и явные вычисления квадратичного символа Гильберта.

I°. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Спаривание, задаваемое формулами (35) § 6, (43) § 7, (50) § 8 является невырожденным по второму аргументу, т.е. для любого элемента $\beta \in F(\mathfrak{p}) \setminus [\pi_0]F(\mathfrak{p})$ найдется элемент $\alpha$ поля $k$ такой, что $\langle\alpha,\beta\rangle_\pi$ является образующей $\theta_0$ -модуля $\mathcal{H}_n$ всех корней изогении $[\pi_0^n]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать утверждение при $n=1$. Возьмем представление элемента $\beta\in F(\mathfrak{p})$ из леммы 8 § 5

$$\beta = \omega(b) +_F \sum_{i\,(F)} E_F(b_i \pi^i),$$

где $b, b_i \in \mathcal{O}$, индекс $i$ пробегает все значения между $1$ и $qe_1$, не делящиеся на $q$,

и представление элемента $\beta \in F(\wp)$ из леммы 9 § 5

$$\beta = \omega(b) +_F \sum_{r\geq 0, j, \rho}(F) [\pi_0^r] \mathcal{E}_\rho (-\theta_{j,r,\rho} \pi^j)$$

где $\theta_{j,r,\rho} \in \mathcal{R}$, индекс $j$ пробегает все значения между $1$ и $qe_1$, не делящиеся на $p$, $0 \leq \rho < f$.

Как было показано в предложении 2 работы [6]

$$\beta \in [\pi_0] F(\wp) \Longleftrightarrow \operatorname{Tr} b \equiv 0 \mod \pi_0,\ b_i \equiv 0 \mod \pi_0$$

Воспользуемся записью

$$\mathcal{E}_\rho(\theta X^i) = E_F\left(\theta X^i + \frac{\theta^{p^\rho}}{1-\pi_0^{p^\rho - 1}} X^{ip^\rho} + X^{ip^\rho+1} g(X)\right),$$

где $g(X) \in \mathcal{O}[[X]]$, которая следует из рассуждений доказательства леммы 9 § 5, чтобы показать, что

$$\beta \in F(\wp) \Longleftrightarrow \operatorname{Tr} b \equiv 0 \mod \pi_0,\ \sum_{\Theta} \theta_{j,0,\rho} \equiv 0 \mod \pi_0$$

для всех $j$, $0 \leq \rho < f$.

Действительно, пусть $jp^\rho$ - наименьшее, для которого не выполняется сформулированное утверждение. Тогда $\sum \theta_{j,0,\rho}^{p^\rho} \equiv$ $\equiv 0 \mod \pi_0$ — противоречие.

Теперь, если у элемента $\beta \notin [\pi_0] F(\wp)$ выполняется $\operatorname{Tr} b \not\equiv 0 \mod \pi_0$, то $\langle \pi, \beta \rangle_\pi = [\operatorname{tr} b](\zeta) \notin [\pi_0] \varkappa_n$. Если $\operatorname{Tr} b \equiv 0 \mod \pi_0$, то возьмем наименьшее $j$ для которого $\sum \theta_{j,0,\rho} \not\equiv 0 \mod \pi_0$ и положим $\varepsilon = 1 + c\pi^{qe_1 - j}$ при подходящем $c \in \mathcal{O}'$, чтобы из формул для спариваний и сравнения (6) заключить $\langle \varepsilon, \beta \rangle \notin [\pi_0] \varkappa_n$ . Предложение доказано.

2°. Свойством символьности спаривания $\langle\ ,\ \rangle$ на $k^* \times F(\wp)$

в работе [7] было названо следующее:

$$\langle \alpha, \mathcal{E}(\alpha^i) \rangle = 0 \tag{53}$$

для любого $\alpha \in \mathfrak{p}$ и числа $i$, не делящегося на $q$. Там же была проверена справедливость этого свойства для спаривания, задаваемого явной формулой $(p \neq 2)$

$$\langle \alpha, \beta \rangle_\pi = [\, tr\, res\, \Phi_{\alpha,\beta}/s\,](3)$$

которое совпадает с символом Гильберта.

В случае $p=2$ свойство (53) для спариваний, определенных в §§ 6-8, вообще говоря, уже не выполняется. Из формул для этих спариваний вытекает, что справедливо следующее обобщение (53) на случай $p=2$ :

а) если $q>p=2$ и $e_0>1$, то

$$\langle \alpha, \mathcal{E}(\alpha^i) \rangle_\pi = 0, \quad \alpha \in \mathfrak{p}, \; q \nmid i$$

б) если $q>p=2$ и $e_0=1$, то

$$\langle \alpha, \mathcal{E}(-\alpha^i) \rangle_\pi = 0, \quad \alpha \in \mathfrak{p}, \quad 2 \nmid i$$

в) если $q=2$ и $e_0>1$, то

$$\langle \alpha, \mathcal{E}_1(\alpha^i) \rangle_\pi = 0, \quad \alpha \in \mathfrak{p}, 2 \nmid i,$$ где

$\mathcal{E}_1 = \lambda^{-1} \circ \lambda_1$ , а ряд $\lambda_1$ определяется так:

$$\lambda_1(X) = \lambda_a(X) + \lambda_a(X^2) + \pi_0 \lambda_a(X^4)$$

г) если $q=2, e_0=1$, то

$$\langle \alpha, \mathcal{E}(\alpha^i) \rangle_\pi = 0, \qquad \alpha \in \mathfrak{p}, 2 \nmid i$$

$3^0$. В мультипликативном случае ($k_0 = \mathbb{Q}_2$, $F = X+Y+XY$ ) М.Кнезер в I95I году получил для символа Гильберта следующие формулы ([31]):

$$(E(x), E(y)) = \prod_{s\geq 0} (-x, E(yx^{2^s})) \prod_{t\geq 1} (-y^{-1}, E(y^{2^t}x))$$

$$(-1, E(x)) = \prod_{t\geq 0} (x^{2^t}, E(x^{2^{t+1}})),$$

где $x$ и $y$ – элементы простого идеала $\wp$.
Х.Брюкнер ([24]) показал, что из этих соотношений следует формула

$$(\varepsilon, \eta) = (\pi, E(\pi\Phi(\pi)))$$

где $\varepsilon, \eta$ – единицы кольца целых поля $k$, ряд $\Phi$ совпадает с рядом $\Phi_{\varepsilon, \eta-1}$ определенным в § 7.

Отметим, что при $p=2$ число $-1$, вообще говоря, не является примарным элементом (т.е. расширение $k(\sqrt[2^n]{-1})/k$ имеет ветвление) и из-за этого, в частности, ряд $\Phi$ устроен сложнее при $p=2$ нежели, чем при нечетном $p$.

Г.Эньяр, пользуясь последней формулой, вывел формулу для символа Гильберта ([26]) в мультипликативном случае. Однако для произвольной формальной группы Любина-Тэйта этот способ уже не годится. В работе формула для обобщенного символа Гильберта получена совершенно иным способом и, значит, формула Брюкнера обобщена на формальные группы Любина-Тэйта.

Покажем в заключение как вычисляется значение квадратичного символа Гильберта ($n=1, k_0=\mathbb{Q}_2, F=X+Y+XY$) с помощью явной формулы, полученной в § 7. В этом случае ряд $z(X)$ соответствует разложению

$$-1 = 1+2+2^2+\dots$$

значит, $z(X) = X + X^2 + X^3 + \dots$ ;

ряд $s(X) = z(X)^2 + 2z(X)$ , поэтому

$$s(X) \equiv X^2 + X^4 + X^6 + \dots \mod 2$$

Если $\beta(2) = 1 + 2b_1 + 4b_2 + \dots$ – единица кольца целых поля $\mathbb{Q}_2$, то

$$\langle 2, \beta(2) \rangle_2 = (-1)^{\operatorname{res} \frac{1}{X}\left(1 - \frac{\Delta}{2}\right) \log \beta(X)/s(X)}$$

и простые вычисления показывают, что

$$\langle 2, \beta(2) \rangle_2 = (-1)^{\frac{b_1}{2} + \frac{b_1^2}{2} + b_2} = (-1)^{\frac{\beta(2)^2 - 1}{8}}$$

Для единицы же $\varepsilon(2) = 1 + 2e_1 + 4e_2 + \dots$

$$\langle \varepsilon(2), \beta(2) \rangle_2 = (-1)^{\operatorname{res}\left(1 - \frac{\Delta}{2}\right) \log \beta(X)\, \varepsilon^{-1} \frac{d\varepsilon}{dX} / s(X)}$$

и

$$\langle \varepsilon(2), \beta(2) \rangle_2 = (-1)^{e_1 b_1} = (-1)^{\frac{\varepsilon(2)-1}{2} \cdot \frac{\beta(2)-1}{2}}$$

что совпадает с хорошо известными формулами ([2], гл.I, §6).

# ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебраическая теория чисел (под ред.Дж.Касселса и А.Фрелиха). М.:Мир, 1969. 483с.
2. Боревич З.И.,Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.:Наука,1985.504с.
3. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М.:Мир,1971. 708с.
4. Вейль А. Основы теории чисел. М.:Мир, 1972. 408с.
5. Востоков С.В. Явная форма закона взаимности. - Изв.АН СССР. Сер.мат., 1978, т.42, № 6, с.1288-1321.
6. Востоков С.В. Норменное спаривание в формальных модулях. - Изв.АН СССР. Сер.мат., 1979, т.43, № 4, с.765-794.
7. Востоков С.В. Символы на формальных группах. - Изв.АН СССР. Сер.мат., 1981, т.45, № 5, с.985-1014.
8. Востоков С.В. Символ Гильберта для формалнных групп Любина-Тэйта.I. - Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат.ин-та АН СССР, 1982, т.114, с.77-95.
9. Востоков С.В.,Фесенко И.Б. Символ Гильберта для формальных групп Любина-Тэйта.II. - Зап.науч.семинаров Ленингр.отд.Мат. ин-та АН СССР, 1983, т.132, с.85-96.
10. Востоков С.В. Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля. - Изв.АН СССР. Сер.мат.,1985,т.49, № 2, с.283-308.
11. Востоков С.В.,Фесенко И.Б. О кручении в высших функторах Милнора многомерных локальных полей. - В кн.: Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. Вып.I.Л.:ЛГУ,1986, с.75-87.
12. Ивасава К. Локальная теория полей классов. М.:Мир,1983.184с.
13. Ломадзе В.Г. К теории ветвления двумерных локальных полей. - Матем.сб.,1979, т.109,№ 3, с.378-394.

14. Милнор Дж. Введение в алгебраическую К-теорию. М.:Мир,1974. 200с.

15. Паршин А.Н. Поля классов и алгебраическая К-теория. - Успехи мат.наук, 1975, т.30, вып.1, с.253-254.

16. Паршин А.Н. Абелевы накрытия арифметических схем. - Докл. АН СССР, 1978, т.243, № 4, с.855-858.

17. Паршин А.Н. Локальная теория полей классов. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1984, т.165, с.143-170.

18. Серр Ж.-П. Когомологии Галуа. М.:Мир,1973. 208с.

19. Фесенко И.Б. Символ Гильберта для формальных групп Любина-Тэйта.Ш. - В кн.: Кольца и матричные группы. Орджоникидзе: СОГУ, 1984, с.146-150.

20. Фесенко И.Б. Обобщенный символ Гильберта в 2-адическом случае. - Вестн.Ленингр.ун-та,1985, № 22, с.112-114.

21. Фесенко И.Б. Факторы К-групп Милнора многомерных локальных полей. - В сб.: Тезисы докладов ХУШ Всесоюзной алгебраической конференции. Кишинев, 1985.

22. Шафаревич И.Р. Общий закон взаимности. - Матем.сб.,1950, т.26(68), № 1, с.113-146.

23. Bass H.,Tate J. The Milnor ring of a global field.-Lect. Notes Math., 1973, v.342, p.349-446.

24. Brückner H. Hilbertsymbole zum Exponenten $p^n$ und Pfaffishe formen. - Hamburg, 1979, 78S.

25. Cartier P. Groupen de Lubin-Tate generalises. - Invent. math., 1976, v.35, p.273-284.

26. Hazewinkel M. Local class field theory is easy. - Advances in Math., 1975, v.18, p.148-181.

27. Henniart G. Sur les lois de reciprocite explicites.I. - J. reine und angew.Math.,1981,Bd.329,S.177-202.

28. Kato K. A generalization of local class field theory by using K-groups. I. - J.Fac.Sci.Univ.Tokyo,Sect.IA,I979, v.26, N 2, p.303-376.

29. Kato K. A generalization of local class field theory by using K-groups.II. - J.Fac.Sci.Univ.Tokyo,Sect.IA,I980, v.27, N 3, p.603-683.

30. Kato K. The existence theorem for higher local class field theory. - Publ.IHES, I980, 43, 37s.

3I. Kneser M. Zum expliziten Reziprozitatsgesetz von Šafarevic.- Math.Nachr., I95I, Bd.6, N 2, S.89-96.

32. Neukirch J. Neubegründung der Klassenkőrpertheorie. - Math. Z., I984, I86, N 4, S.557-574.

33. Serre J.-P. Corps locaus. - Paris: Hermann, I962, 244p.